Chapitre III: les équations de Maxwell dans le vide

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux lois qui constituent la base de l'électromagnétisme à savoir les équations de Maxwell. Celles-ci contiennent l'essence même de la nature et de la structure du champ électromagnétique

Grandeurs fondamentales électriques et magnétiques

- Le champ électrique et la force électromotrice $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

- l'induction électrique $\vec{D}$.

- Le champ magnétique $\vec{H}$.

- L'induction magnétique $\vec{B}$.

Dans un milieu linéaire on a : $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ et $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Avec ε la permittivité absolue du milieu et μ la perméabilité absolue du milieu.

- On définit aussi d'autre grandeurs: la densité de courant: $\vec{J} = \vec{J_c} + \vec{J_D}$

avec $\vec{J_c}$ le courant de conduction et $\vec{J_D}$ le courant de déplacement.

I- Equations de Maxwell

La théorie de l'électromagnétisme est régie par 4 équations appelées Equations de Maxwell. On distingue deux familles d'équations:

1- Equations de structure (pas d'intervention des sources $(\rho,\vec{j})$):

Nom de l'équation	Forme locale	Forme intégrale
Equation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson	$div\,\vec{B} = 0$ Conservation de flux	$\oiint_{S\,fermée} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$
Equation de Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{ds}$

2- Equations reliant le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ *aux sources* $\left(\rho, \vec{j}\right)$:

Nom de l'équation	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour $\vec{E}$ ou équation *de Maxwell-Gauss*	$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{S\,fermée} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
Equation de Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \mu_0 [\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}].\overrightarrow{ds}$

Remarque:

L'équation de Maxwell-Ampère, en régime stationnaire s'écrit : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

En régime variable le champ magnétique se crée par la variation du champ électrique d'où l'ajout de $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans le membre droite de l'équation de la forme locale

ε_0:Permittivité électrique du vide

μ_0:Perméabilité magnétique du vide

❖ **On trouve aussi souvent la notation suivante :**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Dans le vide

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

II Contenu physique des équations de Maxwell

Chacune de ces équations prises individuellement décrit un effet physique. La forme intégrale des équations de Maxwell permet de reconnaitre facilement cet effet.

a- Equation Maxwell flux magnétique:

$$div\,\vec{B} = 0$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale, obtenue en écrivant :

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

Interprétation physique : Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul, ce la veut dire qu'il y a conservation du flux, $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif.

b- Equation de Maxwell Faraday:

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale est:

$$\oint_C \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{ds}$$

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle

C- Maxwell-Gauss:

$$div\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette équation relie le champ électrique à ses sources. Sa forme intégrale est :

$$\oiint_{S\,fermée} \vec{\mathrm{E}}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec Q_{int} représente les charges qui se trouvent à l'intérieur de volume

Cette équation montre que le champ électrique peut lui diverger à partir de points où se trouvent des charges électriques. Le « **théorème de Gauss** » est donc vrai en régime variable

D- Maxwell-Ampère:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\mathrm{B}}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette équation relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique. Sa forme intégrale est:

$$\oint_C \overrightarrow{\mathrm{B}}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \mu_0 [\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}].\overrightarrow{ds}$$

Cette équation exprime la manière dont un courant électrique est à l’origine d’un champ magnétique. Et un champ électrique variable dans le temps crée lui aussi un champ magnétique.

III- Théorème de superposition:

Si une distribution $(\rho_1, \vec{j}_1)$ produit un champ électromagnétique ($\vec{E}_1, \vec{B}_1$) et vérifie les équations de Maxwell

$$\mathrm{div}\vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{\varepsilon_o} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B}_1 = \mu_o\,\vec{j}_1 + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{B}_1 = \vec{\nabla}.\vec{B}_1 = 0$$

Si une distribution $(\rho_2, \vec{j}_2)$ produit un champ électromagnétique ($\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$) et vérifie les équations de Maxwell

$$\mathrm{div}\vec{E}_2 = \frac{\rho_2}{\varepsilon_o} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B}_2 = \mu_o\,\vec{j}_2 + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_2 = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{B}_2 = \vec{\nabla}.\vec{B}_2 = 0$$

Alors une distribution $(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2, \alpha\overrightarrow{j_1} + \beta\vec{j}_2)$produit un champ électromagnétique $(\alpha\vec{E}_1 + \beta\vec{E}_2,\alpha\vec{B}_1 + \beta\vec{B}_2)$ et vérifie les équations de Maxwell

$$\mathrm{div}(\alpha\,\vec{E}_1 + \beta\,\vec{E}_2) = \frac{(\alpha\,\rho_1 + \beta\,\rho_2)}{\varepsilon_o} \qquad \overrightarrow{rot}\,(\alpha\,\vec{B}_1 + \beta\,\vec{B}_2) = \mu_o(\alpha\,\vec{j}_1 + \beta\,\vec{j}_2) + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial(\alpha\,\vec{E}_1 + \beta\,\vec{E}_2)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\,\vec{E}_1 + \beta\,\vec{E}_2) = \vec{\nabla}\wedge(\alpha\,\vec{E}_1 + \beta\,\vec{E}_2) = -\frac{\partial(\alpha\,\vec{B}_1 + \beta\,\vec{B}_2)}{\partial t} \qquad \mathrm{div}(\alpha\,\vec{B}_1 + \beta\,\vec{B}_2) = \vec{\nabla}.(\alpha\,\vec{B}_1 + \beta\,\vec{B}_2) = 0$$

IV- Les équations de Maxwell et la conservation de la charge

On a $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\mathrm{B}}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (*Maxwell-Ampère*)

Mathématiquement: $div\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{vecteur})\right) = 0$

Alors $div\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right) = 0 = div(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = div\left(\mu_0\ \vec{j}\right) + \mathrm{div}(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

$$= \mu_0 div(\vec{j}) + \mu_0\varepsilon_0 div\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0 div(\vec{j}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial div\vec{E}}{\partial t}$$

D'autre part $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ($Maxwell - Gauss$)

Donc $0 = \mu_0 div(\vec{j}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\frac{\rho}{\varepsilon_0}}{\partial t} = \mu_0 div(\vec{j}) + \mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$\Longrightarrow\ div(\vec{j}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$$\boxed{div(\vec{j}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

NB: il n'est pas nécessaire d'ajouter la conservation de la charge aux postulats de l'électromagnétisme dans la mesure où celle-ci découle des équations de Maxwell

V Résolution des équations de Maxwell

Rappel mathématique:

- Si un champ vectoriel $\vec{F}$ à un rotationnel nul $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,G$
- Si un champ vectoriel $\vec{F}$ a une divergence nulle $div(\vec{F}) = 0$ il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel $\vec{F} = \overrightarrow{rot}\,\vec{H}$

Introduction des potentiels:

D'après les équations de Maxwell

$div\,\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (M-T) et $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (M-F)

Il existe au moins un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que: $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

on dit que $\vec{B}$ dérive donc d'un potentiel vecteur $\vec{A}$

En introduisant cette relation dans l'équation de Maxwell –Faraday, on obtient:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\overrightarrow{rot}\,\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Longleftrightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{E}) + \overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Rappel mathématique:

- Si un champ vectoriel $\vec{F}$ à un rotationnel nul $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, G$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\, F$$

F: scalaire quelconque ????

Régime statique :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V}$$

$$\boxed{\vec{E} + \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} = \overrightarrow{grad}\, F}$$

$$\boxed{\vec{E} = \overrightarrow{grad}\, \mathrm{F} = -\overrightarrow{grad}\, V}$$

F= -*V* à une constante près

On peut conclure :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Finalement, on obtiendra les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\, \boldsymbol{V} - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}} \end{cases}$$

Donc, le champ électromagnétique [$\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}$] dérive d'un couple [$\boldsymbol{V}, \vec{\boldsymbol{A}}$] de potentiels appelés Potentiel scalaire et Potentiel vecteur.

Or , le choix du couple [$\boldsymbol{V}, \vec{\boldsymbol{A}}$] n'est pas unique. En effet, il peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{cases} V = V_0 - \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\, \phi \end{cases}$$

$\phi = \phi(\vec{r}, t)$ *désignant un champ scalaire arbitraire*

1) Les potentiels et leurs sources, le choix des jauges : V=??? Et $\vec{A}$ =? ?

On va remplacer les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ par leurs expressions en fonction des potentiels dans les équations de Maxwell avec source, c'est-à-dire dans :

On a $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$(M-G) et $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,(M-A)$

Rappel mathématique:

$$div(\overrightarrow{grad}\,F) = \Delta F : LAPLACIEN\ SCALAIRE$$

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$\Delta\vec{A}$: LAPLACIEN VECTEUR

On sait que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

Alors $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Donc $\overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On sait que $$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Alors $$\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\boldsymbol{-\overrightarrow{grad}\,V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}\right)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{grad}\frac{\partial V}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right)+\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{grad}\frac{\partial V}{\partial t}=\mu_0\vec{j}+\Delta\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Donc $$\boxed{\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{j}+\Delta\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}}$$

Pour faciliter la résolution, en adoptant la condition de **jauge de Lorentz,** qui consiste à imposer:

$$div\,\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\mu_0\vec{J} + \Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{J} = \vec{0}$$

Avec: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Equation de poisson en $\overrightarrow{A}$

D'autre part

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$div\left(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{div\,\vec{E}} = -div\left(\overrightarrow{grad}V\right) - div\left(\frac{\boldsymbol{\partial\vec{A}}}{\boldsymbol{\partial t}}\right)$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,V\right) = \Delta V : LAPLACIEN\ SCALAIRE$$

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = -\Delta V - div\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \\ div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\Delta V - \frac{\partial div\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial div\vec{A}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$$

jauge de Lorentz

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial\left(-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

$$\Delta V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Longrightarrow \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Equation de poisson en V

- La résolution de ces deux équations en termes $\vec{A}$ et V

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$$

<u>Equation de poisson en $\vec{A}$</u>

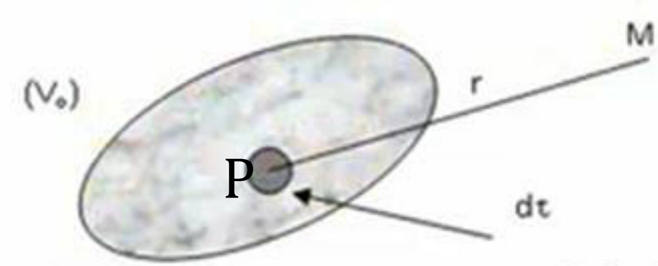
$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

<u>Equation de poisson en V</u>

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\,(t - r/c)}{r}\,dV$$

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint \frac{\rho(t - r/c)}{r}\,dV$$

Avec : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}$: célérité



Calcul des potentiels retardés

$t_p = \frac{r}{c}$: *temps necessaire pour aller de P à M avec la vitesse de la lumière c*

2) Les équations pour $\vec{E}$ =? ? ??? Et $\vec{B}$ =? ?

Pour établir l'équation relative au champ $\vec{E}$, il faut éliminer $\vec{B}$:

On a $$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\,\vec{B}}{\partial t}$$

Donc :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Rappel mathématique:

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

On a

$$\overrightarrow{grad}(div\ \vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Comme

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \overrightarrow{grad}\ div(\vec{E}) = \overrightarrow{grad}\ (\frac{\rho}{\varepsilon_0})$$

Alors:

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\ (\frac{\rho}{\varepsilon_0})$$

En absence de charges et de courants électriques (ρ=0 et $\vec{j} = \vec{0}$)

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0 \Longleftrightarrow \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

<u>Equation de propagation</u>

Le même raisonnement pour $\overrightarrow{B}$:

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0 \Longleftrightarrow \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0$$

Avec: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

- La résolution des équations de propagation

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

On se limite au cas où le champ électrique se propage dans un espace dépourvu de charges et de courants, c'est-à-dire : $\rho=0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

L'équation de propagation s'écrit alors:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

La résolution générale de cette équation de propagation sort du cadre du programme et, on va se limiter au cas, observé, ou la propagation se fait suivant l'axe Oz d'un repère orthonormé Oxyz d'une part et, d'autre part, le champ électrique a une seule composante suivant l'axe Ox et ne dépend donc que du temps et de la variable z

L'équation différentielle de propagation du champ électrique va se traduire comme suit:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0 \quad
\begin{cases}
\Delta E_x - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\
\Delta E_y - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} - \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} = 0 \\
\Delta E_z - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 = \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} - \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} = 0
\end{cases}$$

la propagation de champ électrique se fait suivant l'axe **Oz**

Le champ électrique a une seule composante suivant **Ox**

L'équation de propagation après l'élimination de certains termes:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0}$$

On va chercher la solution de l'équation de propagation générale suivante:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

On pose : $u = z - Ct$ et $v = z + Ct$

On dérive par rapport à la variable z sans oublier que la variable z dépend des variables u et v:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}$$ Sachant que : $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ et $\frac{\partial v}{\partial z} = 1$ $\Rightarrow$ $$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

<u>Relation de chall</u>

On fait la dérivée seconde on aura:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$

On va dériver par rapport à la variable t sans oublier que la variable t dépend des variables u et v:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Sachant que : $\frac{\partial v}{\partial t} = C$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = -C$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = C\frac{\partial F}{\partial v} - C\frac{\partial F}{\partial u}$$

Pour la dérivée seconde on aura:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-C\frac{\partial F}{\partial u} + C\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \left(C\frac{\partial}{\partial v} - C\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(-C\frac{\partial F}{\partial u} + C\frac{\partial F}{\partial v}\right) = C^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + C^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2C^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$

On aura au final :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

La question qui se pose , est comment on va résoudre cette équation!!!!

On va résoudre l'équation suivante : $4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$

On a: $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial F}{\partial v}) = 0$

Ce qui signifie que $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)$ ne dépend pas de u et donc dépend de v

En effectuant une première intégration, sur u, on aura :

$$(\frac{\partial F}{\partial v}) = \text{phi}(v) + k$$

En effectuant une deuxième intégration, sur v, on aura:

$$F(u, v) = f(v) + g(u)$$

En remplace le u et v par leur expression, on aura:

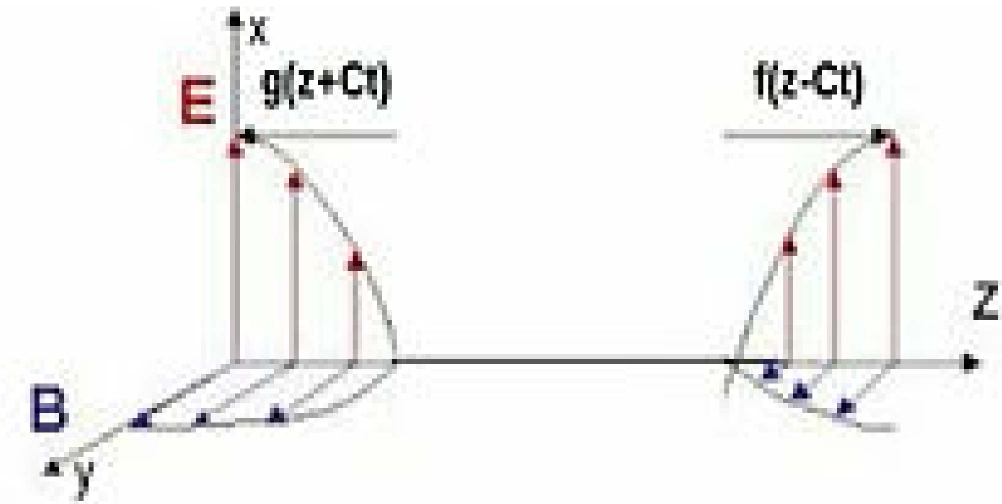
$$F(z,t) = f(z - Ct) + g(z + Ct)$$

Interprétation physique de l'équation :

$$F(z,t)=f(z-Ct)+g(z+Ct)$$

$f(z-Ct)$: est une onde progressive qui se propage vers les z positifs

$f(z+Ct)$: est une onde progressive qui se propage vers les z négatifs



La solution générale s'écrit :

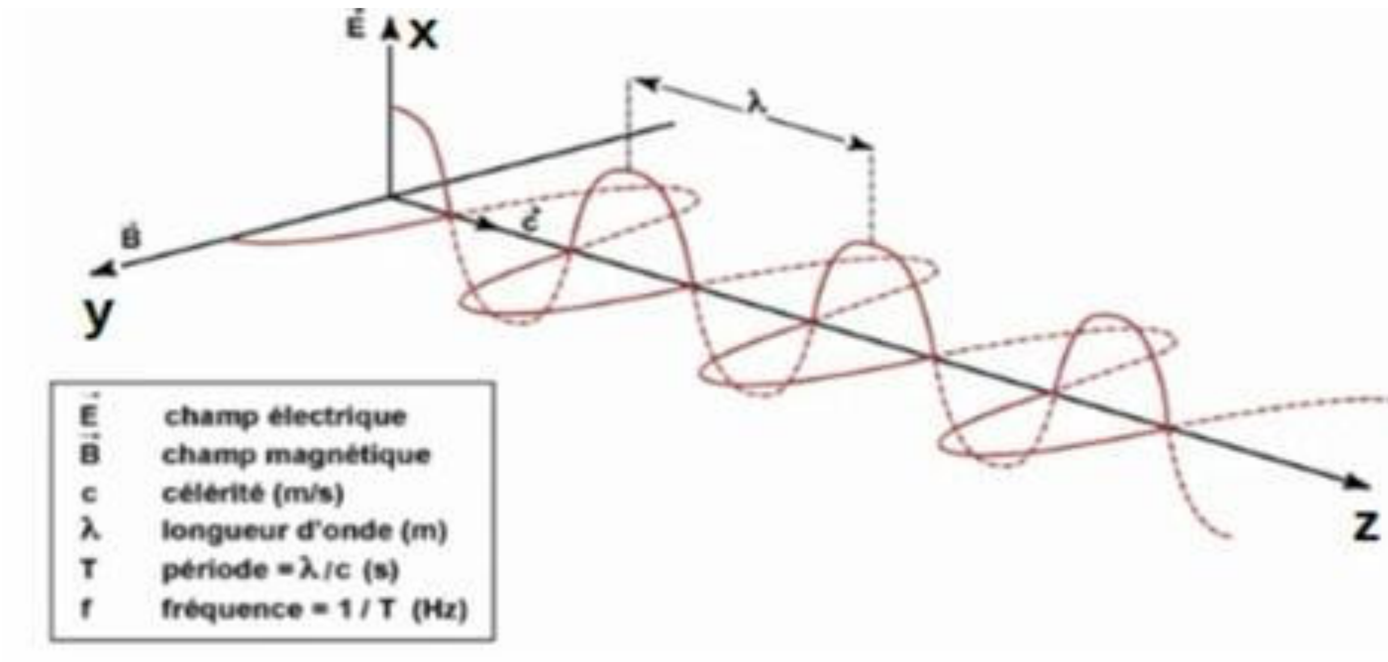
$$\vec{E}(z,t)=E_0\exp(\omega t-kz)\vec{u}_x+E_0\exp(\omega t+kz)\vec{u}_x$$

ω :est la pulsation de l'onde

k : est le vecteur d'onde

E_0:Amplitude du champ électrique

La méthode de résolution de l’équation de propagation du champ électrique peut être appliquée au champ magnétique, donnant lieu à la représentation générale suivante:



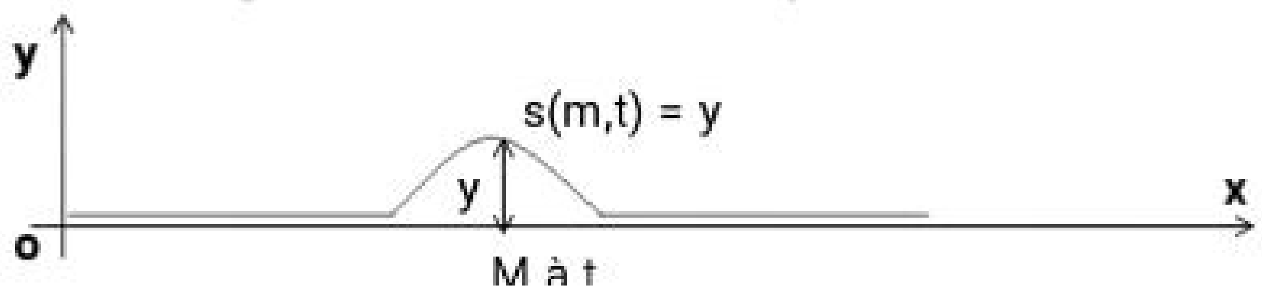
Chapitre IV : onde électromagnétique dans le vide

I- généralités sur les ondes dans le vide :

1- Définitions

Onde: Une onde est une modification de l'état physique d'un milieu matériel ou immatériel , qui se propage à la suite d'une action locale avec une vitesse finie. Elle est représenté par un signal s(m,t) dépendant de l'espace et du temps et se propage avec une célérité (ou vitesse) v.

Exemple: si on applique une tension sur une corde (à l'origine), on constate qu'il y a une déformation qui se propage le long de la corde avec une vitesse v. s(m,t) dans ce cas est l'élongation suivant l'axe des y.



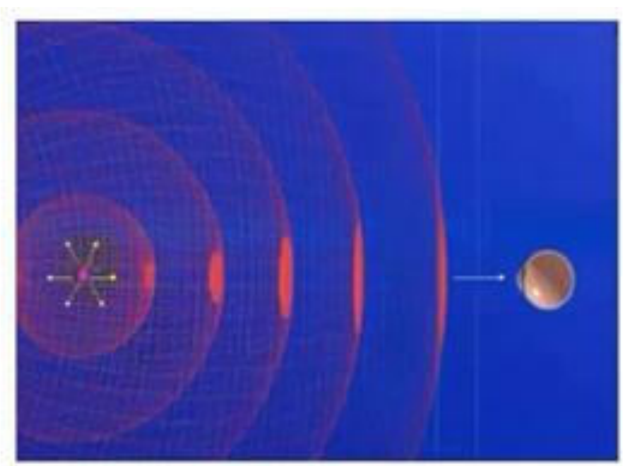
<u>Propagation suivant les x croissants</u>

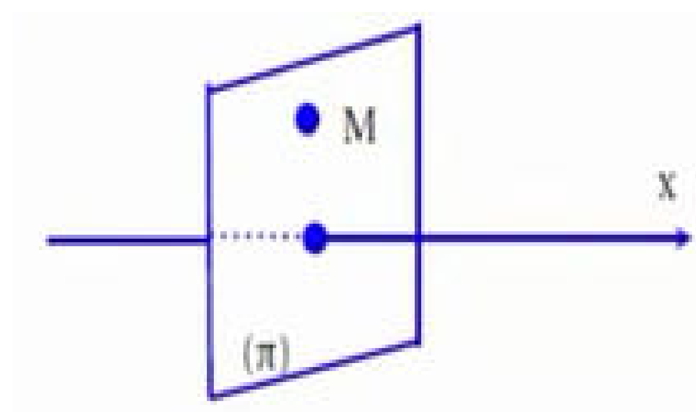
Onde plane: une onde , décrite par la fonction S(M,t), est dite plane s’il est possible de trouver un système de coordonnées cartésiennes telle que S(M,t) ne dépend que dune seule cordonnée d’espace et du temps.

Onde plane progressive: une onde plane progressive est une onde plane qui se propage dans un sens bien déterminé.

Surface d’onde : on appelle surface d’onde l’ensemble des points M telle que S(M,t) est constante

Exemple: pour l’onde plane caractérisée par S(x,t) , la surface d’onde est telle que : S(x,t)= cte, donc c’est un plan perpendiculaire à l’axe Ox



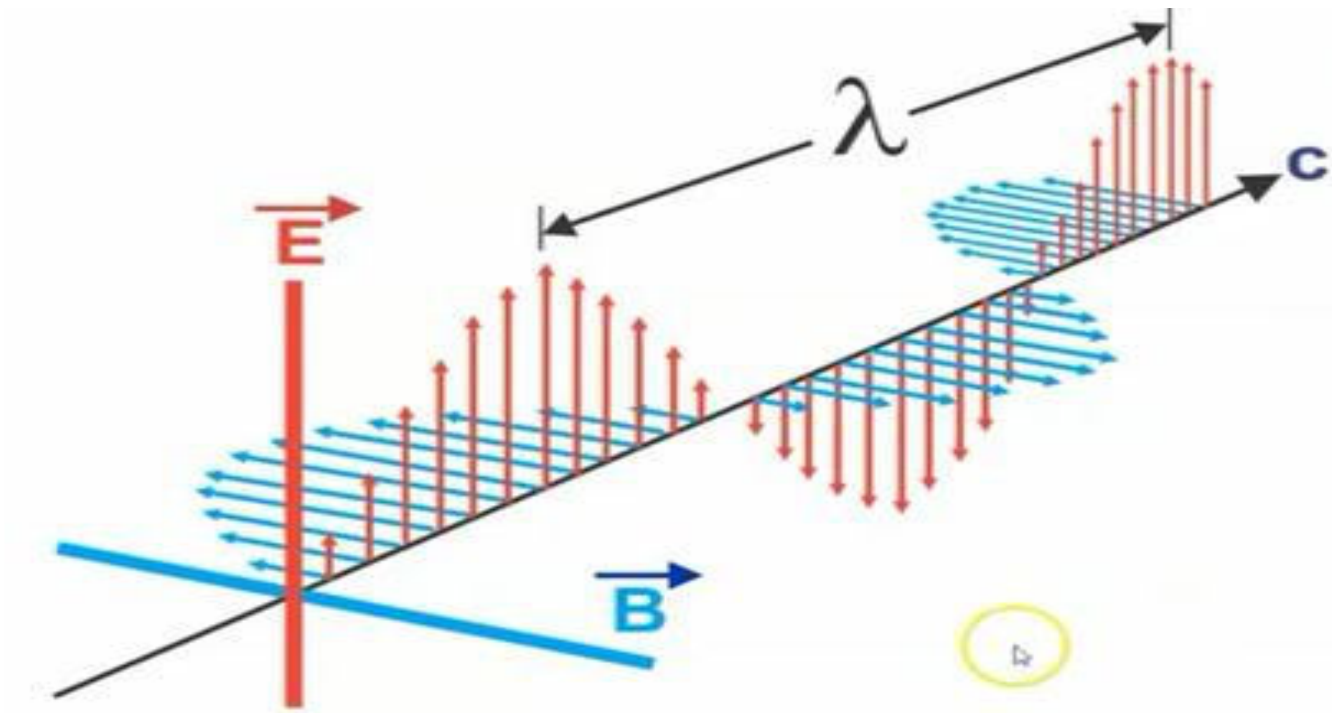


Onde shérique

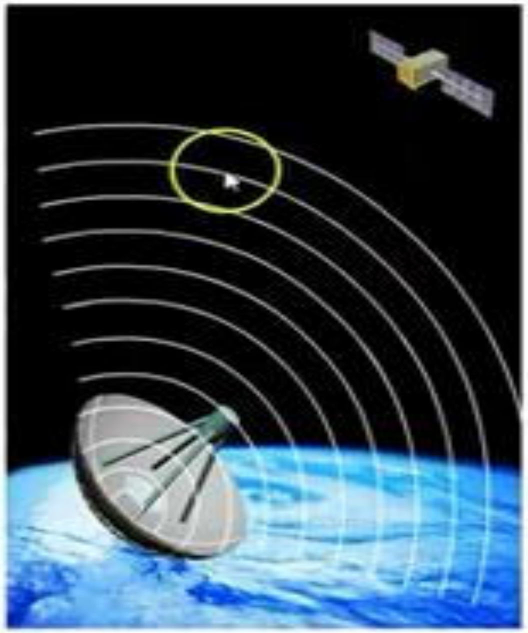
Onde plane

Remarque: le concept d'onde plane est simple mais représente toujours une approximation car il n'est pas valable que dans un espace limité.

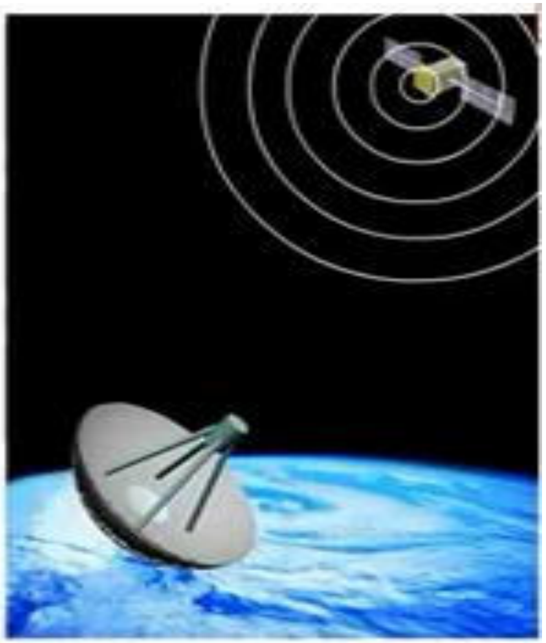
Onde électromagnétique : est le résultat de la vibration couplée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ variable dans le temps . Elle représente tout déplacement de l'énergie électromagnétique sans déplacement de la matière



Exemple :

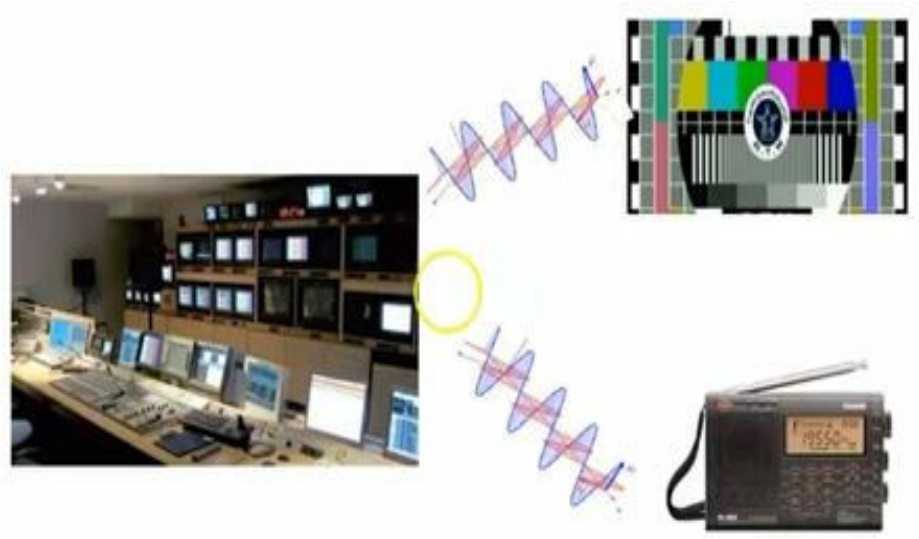


Voie montante



Voie descendante

Ondes électromagnétiques et satellites



Transmission Radio

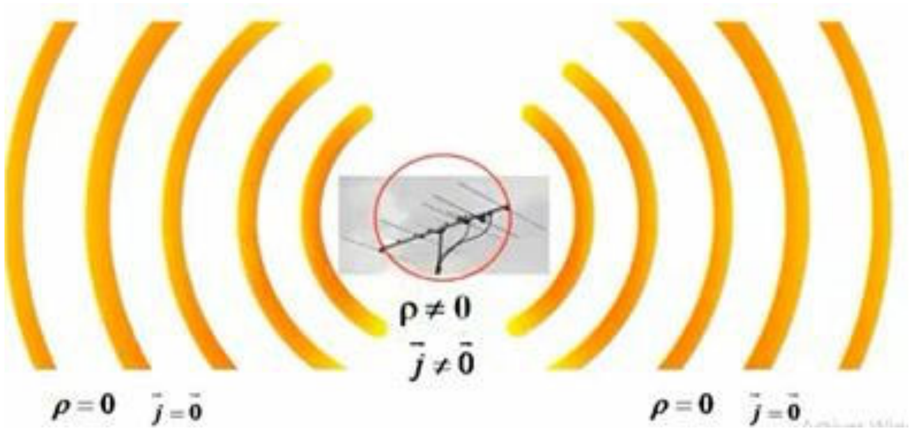
Ondes électromagnétiques et GSM

La radiothérapie est un traitement locorégional des cancers

II Equation de propagation d’une onde électromagnétique dans le vide

1 Champs électromagnétiques

les équations de Maxwell dans le vide(pas de charges ρ=0 et pas de courants $\vec{j} = \vec{0}$:



- $(\mathbf{M} - \boldsymbol{\Phi})$: $\mathrm{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $(M - F)$: $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $(M - G)$: $div\,\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
- $(M - A)$: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On définit la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Les équations de (M-F) et (M-A) sont couplées spatio-temporellement, pour les découpler on
Utilise:

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$

Comme $div\,\vec{E}=0$

Alors

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

De la même manière , on montre que

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

- On note $\square$ $: \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$ $\square$:s'appelle opérateur d'Alembertien

- Les équations de propagation deviennen $\square\vec{E} = \vec{0}$ et $\square\vec{B} = \vec{0}$

Conclusion:

L'onde électromagnétique satisfait dans le vide à l'équation de propagation d'Alembert:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Solution de l'équation d'Alembert

Considérons une onde plane S(x,t) qui se propage suivant Ox, S(x,t) satisfait à l'équation de propagation d'Alembert

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Alembert a montré que la solution générale de cette équation d'onde est de la forme :

$$S(x,t) = f_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_-\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

- $f_+\left(t - \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive (OPP) se propageant avec la célérité c le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants
- $f_-\left(t + \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive (OPP) se propageant avec la célérité c le long de l'axe Ox dans le sens des x décroissants

On va vérifie que $f\left(t-\frac{x}{c}\right)$est solution de la fonction d'Alembert:

$$\frac{\partial f(t-\frac{x}{c})}{\partial x}=\frac{\partial f(t-\frac{x}{c})}{\partial(t-\frac{x}{c})}\,\frac{\partial(t-\frac{x}{c})}{\partial x}=\frac{-1}{c}\,\frac{\partial f}{\partial(t-\frac{x}{c})}\,\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{-1}{c}\,\frac{\partial f}{\partial t}$$

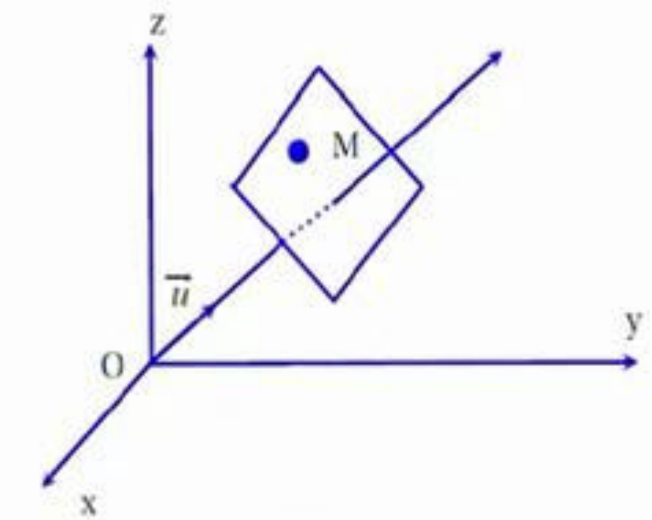
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial\left(t-\frac{x}{c}\right)}\,\frac{\partial\left(t-\frac{x}{c}\right)}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\left(t-\frac{x}{c}\right)}\,\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

L'équation de d'Alembert étant invariante par changement de x en –x, une fonction quelconque de $t+\frac{x}{c}$ est donc aussi solution de cette équation

➢ Cas d'une direction quelconque

Dans le cas de la propagation d'une onde plane dans une direction quelconque suivant $\vec{u}$

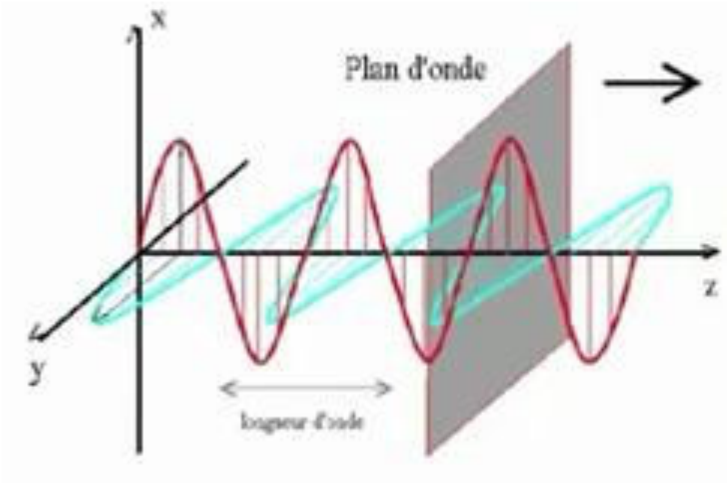


$$S(M,t) = f_+\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}.\,\vec{u}}{c}\right) + f_- f_+\left(t + \frac{\overrightarrow{OM}.\vec{u}}{c}\right)$$

III Structure de l'onde électromagnétique plane progressive (OEMPP)

Soit une OEMPP dépendant de z et de t

- $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(z,t)\ et\ \vec{B}(M,t) = \vec{B}(z,t)$



- Les équations de propagation:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

- Les solutions

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{z}{c}\right) + \vec{E}_-\left(t + \frac{z}{c}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{B}_+\left(t - \frac{z}{c}\right) + \vec{B}_-\left(t + \frac{z}{c}\right)}$$

- On s'intéresse dans la suite de ce paragraphe à l'OEMPP suivant Oz dans le sens des z croissants

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{z}{c}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{B}_+\left(t - \frac{z}{c}\right)}$$

- Si le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation, on dit que le champ électrique $\vec{E}$ est transversal

$$\overrightarrow{E}\,.\,\vec{e}_z = 0$$

- Si le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation, on dit que le champ magnétique $\vec{B}$ est transversal

$$\overrightarrow{B}.\vec{e}_z = 0$$

Relation entre le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$

➢ **Calculons $\vec{\nabla} f(t - \frac{z}{c})$**

$$\vec{\nabla} f\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{\partial f(t - \frac{z}{c})}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial f(t - \frac{z}{c})}{\partial(t - \frac{z}{c})}\,\frac{\partial(t - \frac{z}{c})}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{-1}{c}\frac{\partial f}{\partial(t - \frac{z}{c})}\,\frac{\partial t}{\partial t}\vec{e}_z = \frac{-1}{c}\,\frac{\partial f}{\partial t}\vec{e}_z$$

- On peut écrire:

$$\vec{\nabla} \bullet = -\frac{-1}{c}\,\frac{\partial \bullet}{\partial t}\vec{e}_z$$

- $(M-F)$: $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{c}\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$

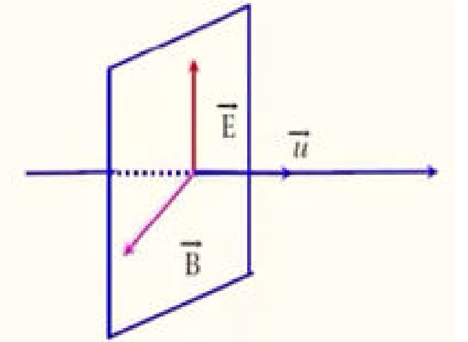
- $(M-A)$: $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{c}\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \wedge \vec{e}_z) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_z$

- Généralisation: pour une OEMPP se propageant suivant la direction $\vec{u}$ *on a*:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_z$$

Donc $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ est un trièdre direct



IV Onde électromagnétiques planes progressives harmoniques (OPPH) ou monochromatiques (OPPM)

1- Définition:

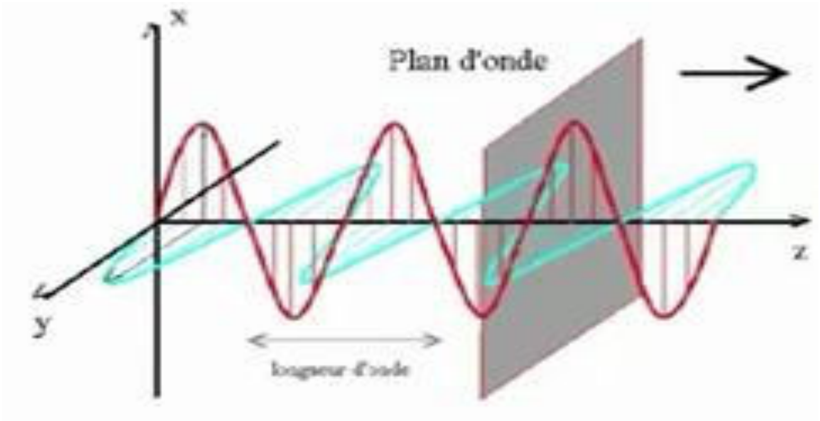
Une onde plane progressive S(M, t) est dite monochromatique (harmonique) s'elle s'écrit sous la forme:

$$S(M,t) = S_0 \cos(wt - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0)$$

- $S_0 : amplitude$
- $w : \; pulsation\ ou\ fréquence\ angulaire$
- $\vec{k} = k\,\vec{u} : vecteur\ d'onde$
- $\vec{u}$: vecteur unitaire suivant la direction de propagation de l′onde
- $\varphi_0 : \; phase$ à $l'origine$

❖ La grandeur $\Phi(M,t) = wt - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0$ représente la phase de l'onde à l'instant t au point M

❖ Pour l'onde électromagnétique:



$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(wt - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0) \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0\cos(wt - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0)$$

2- Représentation complexe

❖ En notation complexe:

$$\underline{S}(M,t) = \underline{S_0}e^{j(wt - \vec{k}.\vec{r})} = S_0 e^{j(wt - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0)}$$

$\underline{S}_0 = S_0 e^{j\varphi_0}$: *amplitude complexe*

❖ $\mathrm{S}(M,t) = Re(\underline{S}(M,t))$

L'onde électromagnétique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(wt - \vec{k}.\vec{r})} \qquad et \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(wt - \vec{k}.\vec{r})}$$

- En notation complexe on a :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = jw\vec{E} \qquad div\vec{E} = -\mathrm{j}\,\vec{k}\,\vec{E} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mathrm{j}\vec{k} \wedge \vec{E} \qquad \Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

3 Cas particulier :

si la propagation est suivant Oz, le champ $\vec{E}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{E}(z,t) : \left| \begin{array}{l} E_x = E_{ox}\cos(wt - kz + \varphi_1) \\ E_y = E_{oy}\cos(wt - kz + \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$

4 intérêt des ondes planes monochromatiques:

- Guide d'onde (par superposition d'OPPM, on aboutit à des solutions physiques réalistes
- Le champ de rayonnement d'une source sinusoïdale à grande distance est assimilable à une OPMM

5- relation de dispersion

- L'équation de propagation :

$$\boxed{\Delta\underline{S} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{S}}{\partial t^2} = 0}$$

- Si l'onde électromagnétique se propage suivant Ox:

$$\vec{k} = k\vec{e}_x \text{ et } \underline{S}(M,t) = \underline{S_0}e^{(wt-kx)}$$

Alors: $\frac{\partial}{\partial t} = jw \quad et \quad \Delta = (jk)^2 = -k^2$

- L'équation de propagation s'écrit:

$$\boxed{-k^2\underline{S} + \frac{w^2}{c^2}\underline{S} = 0}$$

- La relation de dispersion:

$$\boxed{k = \frac{w}{c}}$$

❖ Définition:

Un milieu est dit dispersif, si la relation de dispersion $w = f(k)$ n'est pas linéaire.

- Dans le vide $k = \frac{w}{c}$ est une relation linéaire, donc le vide est un milieu non dispersif

❖ relation de structure des OPPM

$$(M-F):\ \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = jw\vec{B}$$

$$\Longrightarrow \quad -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{E} = -jw\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{w}$$

$$(M-A):\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = jw\vec{E}$$

$$\Longrightarrow \quad -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{B} = -jw\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{B}}{w}$$

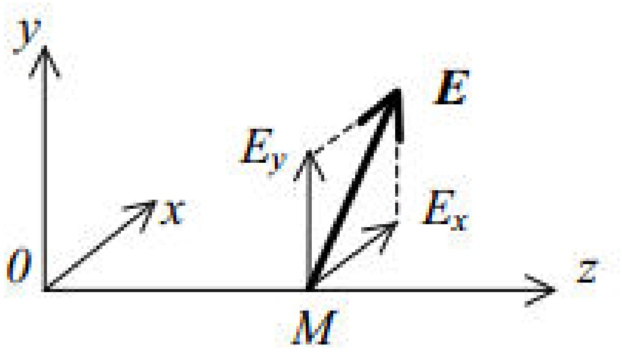
V polarisation des OPP Monochromatiques

1 Définition

La polarisation d'une O.E .M est l'évolution de direction du champ $\vec{E}$ attaché à cette onde au cours de la propagation

Considérons une onde plane monochromatique se propageant suivant Oz:

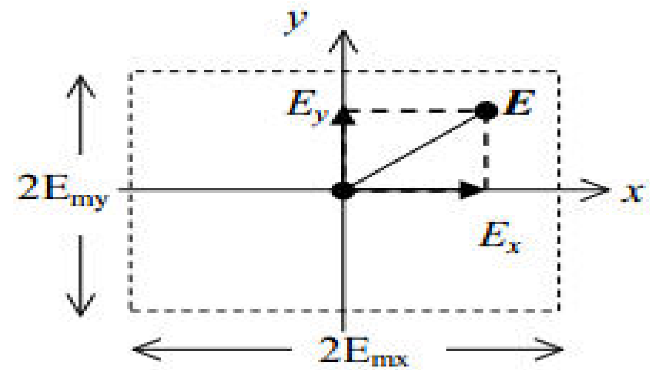
$$\vec{E}(z,t) \left| \begin{array}{l} E_x = E_{mx}\cos(wt - kz - \varphi_1) \\ E_y = E_{my}\cos(wt - kz - \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$



2 Différents états de polarisation dans le plan d'onde

Par commodité on se place dans le plan z=0:

$$E_x = E_{mx}\cos(wt - \varphi_1)$$
$$E_y = E_{my}\cos(wt - \varphi_2)$$



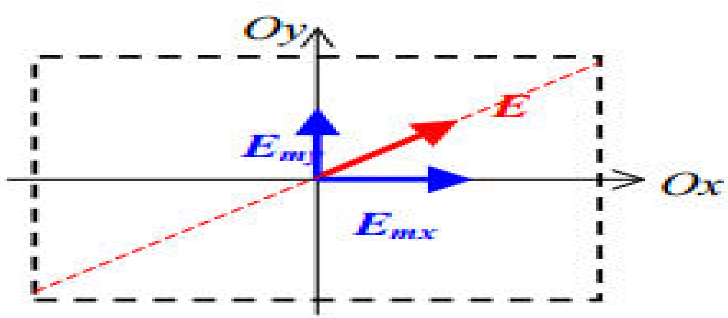
Dans le plan Oxy, l'extrémité du champ $\vec{E}$ décrit une courbe inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{max}$ et $2E_{min}$

Différents cas se présentent :

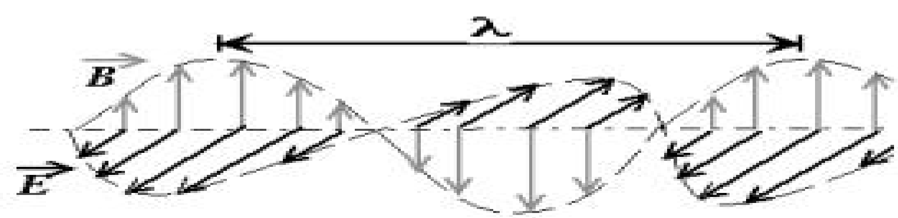
a) 1^{er} cas : $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ou π

Les composantes oscillent en phase ➡ $\dfrac{E_x}{E_y} = \dfrac{E_{mx}}{E_{my}}$

Le champ garde une direction fixe ➡ **Polarisation rectiligne**



les deux composantes en phase



b) 2^{eme} *cas* : $\boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1 \neq n.\pi}$

Posons $\varphi = \boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1}$, on peut écrire :

$$E_x = E_{mx}\cos(wt) \qquad\qquad E_y = E_{my}\cos(wt - \varphi)$$

$$\frac{E_x}{E_{mx}} = \cos(wt) \qquad\qquad \frac{E_y}{E_{my}} = \cos(wt)\cos(\varphi) + \sin(\mathrm{wt})\sin(\varphi)$$

$$\Longrightarrow \quad \sin(wt)\sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{my}} - \frac{E_x}{E_{mx}}\cos(\varphi)$$

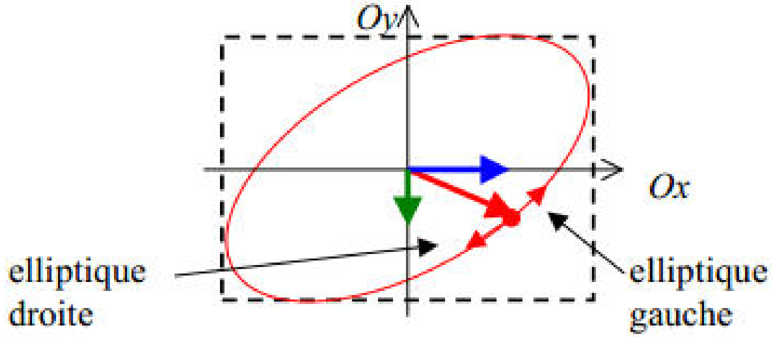
$$\Longrightarrow \quad \cos(wt)\sin(\varphi) = \frac{E_x}{E_{mx}} sin(\varphi)$$

On élève au carré les 2 expressions et on les ajoute:

$$\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)\cos(\varphi) = sin^2(\varphi)$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse

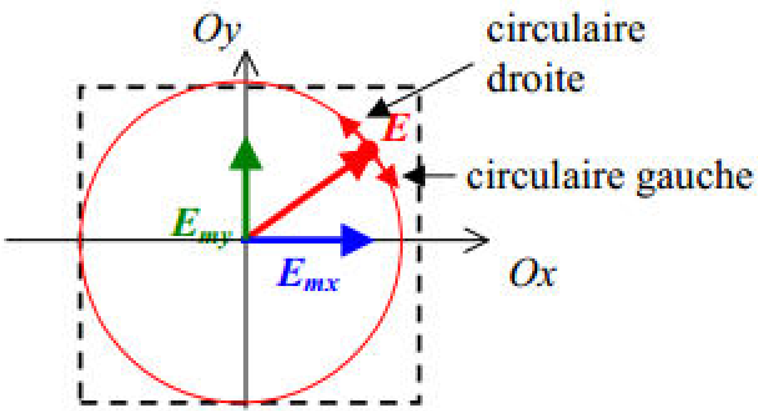
→ **polarisation elliptique**



Remarques:

- $\boldsymbol{cas\ particulier}$: $\boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1} = (2\mathrm{n}+1).{}^{\pi}/_{2}\ et\ E_{mx} = E_{my}$

Dans ce cas **la polarisation est circulaire**



- Sens de rotation:

$$\text{à}\quad t = 0 \longrightarrow \qquad E_y\ est\ max \qquad et \qquad \left.\frac{\partial E_y}{\partial t}\right| = E_{my}\sin(\varphi)$$

le sens de rotation est donc donné par le signe de $\sin(\varphi)$

VI Energie électromagnétique

Les ondes électromagnétiques transportent de l’énergie. La propagation de cette énergie se ressent dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, comme par exemple, lors d’une exposition aux rayons solaires ou au rayonnement d’une source chaude, lorsqu’on fait chauffer un aliment dans un four a micro-ondes, ou lorsqu’on capte les émissions d’une station de radio ou de télévision.
On peut donc dire qu’en tout point ou règne un champ électromagnétique, il existe une certaine densité d'énergie électromagnétique.

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposerons le milieu de propagation parfait, c’est à dire homogène, isotrope et linéaire

1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique w en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant:

w : densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

Considérons dans le milieu, un volume τ limité par une surface (S).

L'énergie électromagnétique qu'il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w \, d\tau$$

Pendant un temps *dt* l'accroissement d'énergie dans (τ) sera *dW* et la puissance instantanée *p'* acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau$$

Soit $$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{E}_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On a : $$(M-F):\ \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Et $$(M-A): \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc $$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E}\,\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0}\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$$

D’après la relation de transformation, on a :

$$div\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

Alors: $$\frac{\partial w}{\partial t} = -div\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume (τ) est :

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau$$

$$p' = -\iiint_{(\tau)} div(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\tau$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume (τ),

c’est à dire la puissance moyenne ***p*** **rayonnée par ce volume.**

$$p = -p' = \iiint_{(\tau)} div(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\tau$$

D’après la formule d’**Ostrogradsky**, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} (\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\vec{S} = \iint \vec{\Pi}\, d\vec{S}$$

2 Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

$\vec{\Pi}$ est appelé le vecteur de Poynting. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie ; on les appelle les ''rayons électromagnétiques''.

La puissance *P* transportée par un champ électromagnétique à travers une surface ***S* est le flux du vecteur de Poynting :**

$$\mathrm{P} = \int_S \vec{\Pi} . d\vec{S}$$

Exemple : OPPM

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{C} = \frac{1}{C}\begin{vmatrix} -E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Avec: $\vec{k} = k\vec{u}$

Déterminons maintenant l'expression du vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{1}{C\mu_0}\begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ [E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x)]^2 + [E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y)]^2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0}\left\{E_{0x}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_y)\right\}\vec{u}_z}$$

La moyenne temporelle est égale à:

$$\boxed{\overline{\vec{\Pi}} = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2C\mu_0}\vec{u}_z = \frac{\overline{E^2}}{C\mu_0}\vec{u}_z}$$

Ou encore:

$$\boxed{\overline{\vec{\Pi}} = C\frac{\overline{B^2}}{\mu_0}\vec{u}_z}$$